



- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
 - b) Este examen consta de 8 ejercicios.
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
 - d) Se realizarán únicamente **cuatro** ejercicios de los **ocho** ejercicios propuestos. Si se realizan más de cuatro ejercicios, solo se evaluarán los primeros cuatro ejercicios que aparezcan físicamente en el papel de examen.
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0.25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \ln(1+x) - (a+1)x}{x^2}$ es finito, calcula a y el valor del límite (\ln denota la función logaritmo neperiano).

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Determina la función $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, sabiendo que es dos veces derivable, su gráfica pasa por el punto $(0, 1)$, $f'(0) = 0$ y $f''(x) = \frac{1}{x+1}$

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

- a) Discútelo según los valores de a . **(1.75 puntos)**
- b) Resuelve, si es posible, el sistema para $a = 1$ y $a = -2$. **(0.75 puntos)**

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera el punto $P(1, 0, -1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ x - z = 1 \end{cases}$

- a) Determina el punto simétrico de P respecto de la recta r . **(1.5 puntos)**
- b) Calcula el punto de la recta r que dista $\sqrt{6}$ unidades de P . **(1 punto)**



EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{|x|}{2-x}$ para $x \neq 2$.

- Estudia la derivabilidad de f . **(1.25 puntos)**
- Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = -4x + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + c$.

- Halla el valor de c sabiendo que sus gráficas se cortan en el punto en el que g alcanza su máximo. **(1 punto)**
- Para $c = -3$, calcula el área de la región limitada por ambas gráficas. **(1.5 puntos)**

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

- Calcula A^{37} y A^{41} . **(1.5 puntos)**
- Halla el determinante de la matriz $3A^{52}(A^t)^4$, donde A^t es la matriz traspuesta de A . **(1 punto)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los vectores $\vec{u} = (2, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, -1)$ y $\vec{w} = (a, b, 1)$.

- Halla a y b sabiendo que los tres vectores son linealmente dependientes y que \vec{w} es ortogonal a \vec{u} . **(1.5 puntos)**
 - Para $a = 1$, calcula el valor o valores de b para que el volumen del paralelepípedo formado por dichos vectores sea de 6 unidades cúbicas. **(1 punto)**
-